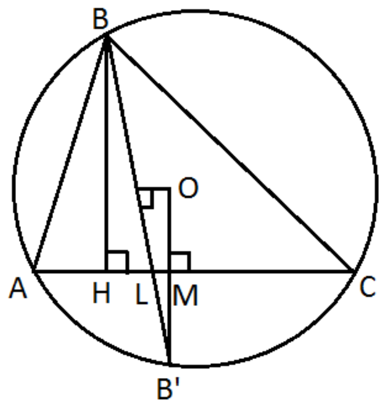
Очный тур олимпиады «Паруса надежды» 2018 год.

Вариант 3.

1) Рассмотри треугольник ABC с данными высотой BH, биссектрисой BL и медианой BM. Продолжим биссектрису BL до пересечения с описанной окружностью в точке B' (так как $\angle ABB' = \angle CBB'$, то B' – середина дуги AC). Теперь через точку M проведем перпендикуляр к хорде AC. Тогда B' (середина дуги) и точка O (центр описанной окружности) принадлежат этому серединному перпендикуляру. Таким образом, чтобы построить $\triangle ABC$, сначала



надо построить треугольник BHM (по гипотенузе BM и катету BH), потом на отрезке MH отметить точку L (биссектриса всегда лежит между медианой и высотой) и найти точку B' как точку пересечения перпендикуляра к прямой HM в точке M и прямой BL. Центр окружности O есть точка пересечения прямой MB' и серединного перпендикуляра к хорде BB'. Вершины A и C есть точки пересечения этой окружности с прямой HM.

2) Так как равенство должно выполняться при всех x, в том числе при $x_2 = \frac{1}{x}$. Тогда получаем $\left(\frac{1}{x} - 1\right) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{-x+1}$. Объединяя это равенство с первоначальным в систему и обозначая $f(x) = y$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = z$, получим $\begin{cases} (x-1)y + z = \frac{1}{x-1} \\ \frac{1-x}{x} z + y = \frac{x}{1-x}. \end{cases}$ Решая эту систему, находим, что $y = \frac{1}{1-x}$. Ответ $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

3) Обозначим $x - y + 3z - 1 = A, 2x + 2y - 2z - 3 = B, 7 - 3x - y - z = C$. По ОДЗ A, B, C больше нуля, но x, y, z – целые числа, следовательно A, B, C – натуральные числа. Но заметим, что $A + B + C = 3$, следовательно это возможно лишь при $A = B = C = 1$. А тогда получим неравенство $x^2 + x - 6 < 0$. Решая его, находим, что $-3 < x < 2$. Так как x - целое число, то отсюда получаем что $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Рассмотрим систему $A = 1, B = 1$ как систему относительно y и z при известном x. Решение этой системы $y = 4 -$

$2x, z = 2 - x$ попеременно подставляя в эти равенства известное x, мы получим ответ: $\{(-2; 8; 4), (-1; 6; 3), (0; 4; 2), (1; 2; 1)\}$.

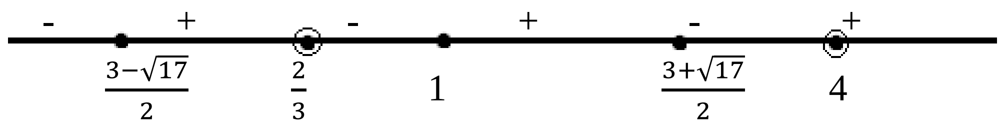
4) Данное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(4^x - 4^2)((x^2 - 3x)^2 - 2^2)}{(2x-3)^2 - (x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2-3x-2)(x^2-3x+2)}{(2x-3-x-1)(2x-3+x+1)}$$

$$\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x-2)(x^2-3x-2)}{(x-4)(3x-2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-4)\left(x-\frac{2}{3}\right)} * \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) * \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \geq 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим



Ответ: $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left[1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right] \cup (4; +\infty)$.

5) Рассмотри функцию $f(x) = \frac{tgx}{x}$ $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Найдем ее производную:

$$f'(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$$

Так как $x - \sin x \cos x = \frac{1}{2}(2x - \sin 2x) > 0$, то при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ производная $\frac{tgx}{x}$ положительна, т.е. функция $f(x)$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Отсюда получаем, что

$$\frac{tg\frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}} < \frac{tg\frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}; \frac{tg\frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}} < \frac{tg\frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}} \Longrightarrow \frac{tg5^o}{5} < \frac{tg6^o}{6} \text{ и } \frac{tg9^o}{9} < \frac{tg10^o}{10}$$

А тогда $\frac{tg5^o}{5} * \frac{tg9^o}{9} < \frac{tg6^o}{6} * \frac{tg10^o}{10} \Leftrightarrow 4tg5^o tg9^o < 3tg6^o tg10^o$.

Ответ: первое число слева меньше второго (справа).

6) Как известно, для правильного тетраэдра с ребром a радиус сферы r описанный вокруг данного тетраэдра, находится по формуле $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Применим эту формулу для вычисления радиуса R сферы S. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры сфер радиуса 1. Тогда тетраэдр с вершинами в точках O_1, O_2, O_3, O_4 будет правильным со стороной 2. А тогда радиус сферы, описанной вокруг этого тетраэдра равен $\frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Из симметрии ясно, что центр сферы S- точка O, будет центром сферы, описанной вокруг тетраэдра O_1, O_2, O_3, O_4. А тогда R – радиус этой сферы будет на 1 больше, чем $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\left\{1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

7) Преобразуем правую часть равенства, записав как: $\frac{10^{20}-1}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=\frac{(10^{10}-1)(10^{10}+1)}{9}+\frac{10^{10}-1}{9}=\frac{10^{10}-1}{9}(10^{10}+2)=\frac{10^{10}-1}{3}*\frac{10^{10}+2}{3}$. Покажем, что число $\frac{10^{10}-1}{3}$ является корнем данного квадратного уравнения. Подставляя это число в левую часть уравнения, получаем, что

$$\left(\frac{10^{10}-1}{3}\right)^2+\frac{10^{10}-1}{3}=\frac{10^{10}-1}{3}\left(\frac{10^{10}-1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{10^{10}-1}{3}*\frac{10^{10}+2}{3},$$

что равно правой части. По теореме Виета находим второй корень, он равен: $-\frac{10^{10}+2}{3}$. Ответ: $\left\{\frac{10^{10}-1}{3};-\frac{10^{10}+2}{3}\right\}$.

8) Условия касания графиков данных функций в точке с абсциссой x_0 будут: значения функций, и производных в точке касания x_0 равны. Следовательно имеем для нахождения a и точки x_0 систему: $\begin{cases} a^{x_0}=x_0 \\ a^{x_0}\ln a=1. \end{cases}$ Тогда из второго уравнения имеем $a^{x_0}=\frac{1}{\ln a}$. Подставив это выражение в первое уравнение получим $x_0=\frac{1}{\ln a}$ и, следовательно, из второго уравнения получим уравнение $a^{\frac{1}{\ln a}}*\ln a=1$. Логарифмируем это уравнение, получим

$$\frac{1}{\ln a}\ln a+\ln\ln a=0\Rightarrow\ln(\ln a)=-1;\ln a=\frac{1}{e};a=e^{\frac{1}{e}}.$$

Проверка показывает, что это значение $a=e^{\frac{1}{e}}$ является искомым. Ответ: $e^{\frac{1}{e}}$.